УДК 330.43

Апробация методики спецификации моделей стохастической границы с учетом возможной зависимости компонент ошибки

В.А. Руденко

В работе будем рассматривать степенную модель стохастической производственной функции, которая в общем виде может быть представлена как M_r:

$$R_i = \beta_0 \cdot \left(x_i^1\right)^{\beta_1} \cdot \left(x_i^2\right)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \left(x_i^p\right)^{\beta_p} \cdot e^{V_i - U_i}$$

где R_i — объясняемая компонента i-ого объекта (объем выпуска компании, ВРП региона и т.п.), x_i — объясняющие компоненты (напр., факторы производства). Случайные составляющие ошибки

$$V_i \sim N\left(0; \sigma_V^2\right) \text{ и } U_i \sim N^+\left(\mu; \sigma_U^2\right)$$

могут быть зависимы. Зависимость компонент, как в большинстве современных исследований, описывается с помощью аппарата копула-функций. Этот способ является достаточно трудоемким с вычислительной точки зрения, однако его основное преимущество заключается в возможности широкого применения и отсутствии строгих ограничений на вид совместного распределения компонент. Так, в некоторых работах, авторы которых отказываются от использования копул [напр., 2], рассматриваются только те виды двумерных распределений, которые позволяют получить точки максимума функции правдоподобия аналитически, в явной форме.

В ходе исследования мы рассматривали два вида копула-функций [3] из разных семейств: нормальную и копулу Франка.

1) Плотность двумерной нормальной копула-функции имеет вид:

$$c^{Norm}(u_1, u_2) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^T(\Sigma^{-1} - I)\zeta\right),$$

где $\zeta = \left(\Phi^{-1}(u_1)\ \Phi^{-1}(u_2)\right)^T$ — вектор, компонентами которого являются обратные функции одномерного стандартного нормального распределения,

$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$ — корреляционная матрица, I — единичная матрица.

2) Плотность копулы Франка задается выражением:

$$c^{Frank}(u_1, u_2, \alpha) = \frac{-\alpha(e^{-\alpha} - 1)e^{-\alpha(u_1 + u_2)}}{\left((e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1) + e^{-\alpha} - 1\right)^2}$$

Если $f_v(x)$ и $f_u(y)$ — одномерные плотности распределения случайных компонент V_i и U_i соответственно, то совместная плотность распределения и в зависимости от выбранной копулы выражается как

$$f^N(x, y) = c^{Norm}(F_V(x), F_U(y)) \cdot f_V(x) \cdot f_U(y) \text{ или}$$

$$f^F(x, y) = c^{Frank}(F_V(x), F_U(y)) \cdot f_V(x) \cdot f_U(y).$$

Эмпирический анализ рассматриваемых моделей проводился как на смоделированных, так и на реальных данных.

Исследование, проведенное на смоделированных данных, было выполнено с целью сравнения оценок, полученных в различных моделях, с истинными значениями параметров и показало, что использование копул позволяет выявить наличие зависимости составляющих ошибки, оценить его, а также получить обоснованные оценки параметров модели и значений технической эффективности, хорошо согласованные с истинными значениями. Кроме того, было установлено, что при невысоких показателях корреляции компонент V_i и U_i (меньше 0.4) оценки, полученные с учетом и без учета зависимости, в высокой степени согласованы между собой и положительно коррелированны с истинными значениями.

При проведении анализа на реальных данных рассматривалась двухфакторная модель для регионов РФ. В качестве объясняемой переменной был взят ВРП региона, а в качестве объясняющих — стоимость основных фондов региона и численность его экономически активного населения за 2013–2015 годы. В результате построения моделей для различных групп регионов, классификация которых проводилась в соответствии с [4], было установлено, что во всех случаях достаточно ограничиться классическими моделями без учета зависимости компонент ошибки, что позволит не производить трудоемких вычислений с использованием копул. В то же время, в работах [2, 5, 6] показано, что учет возможной зависимости компонент иногда позволяет улучшить качество оценок при анализе реальных данных. В разработанной нами методике решение о необходимости применения аппарата копула-функций принимается на основе критерия разности логарифмов правдоподобий [7], а выбор конкретного вида копулы — путем поиска модели с наибольшим значением функции правдоподобия среди тех моделей с копулами, которые в большей степени подходят для достижения целей конкретного исследования.

Кроме того, эмпирический анализ смоделированных и реальных данных показал, что наличие значимых факторов эффективности в модели стохастической границы позволяет принять гипотезу о независимости случайных составляющих ошибки V_i и U_i.

Выводы

1. Проведенный анализ смоделированных и реальных данных свидетельствует о том, что аппарат копула-функций позволяет корректно учитывать возможную зависимость случайных составляющих ошибки в моделях стохастической границы. Выбор конкретного вида копул, применяемых для решения задач различного типа, должен быть обусловлен целями исследования.
2. Использование классических моделей стохастической производственной функции допустимо для поиска оценок параметров основных факторов производства, а также в случае наличия информации о значимых факторах эффективности. При решении задач, связанных с оценкой технической эффективности или с ранжированием объектов по уровню эффективности, в случае отсутствия экономического или статистического обоснования независимости компонент ошибки следует учитывать их возможную зависимость.
3. В соответствии с разработанной методикой спецификации моделей стохастической границы гипотезу о независимости компонент ошибки следует принимать в случаях, когда при рассмотрении копул, выбранных для конкретного исследования, соответствующие статистики разности логарифмов правдоподобия меньше критического значения, которое зависит от применяемого уровня значимости. В тех случаях, когда указанные значения меньше, но близки к критическим, допустимо рассмотрение дополнительных видов копула-функций с целью повышения точности искомых оценок.
4. Применение копула-функций в моделях стохастической границы позволяет расширить диапазон значений технической эффективности. Также стоит отметить, что в случаях, когда гипотеза об отсутствии неэффективности в классических моделях не отвергается, при использовании копул диапазон значений расширяется несущественно.

Литература

1. Aigner D.J., Lovell C.A.K. and Schmidt P. Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models // Journal of Econometrics. 1977. № 6. Pp. 21–37.
2. Gómez-Déniz E., Pérez-Rodríguez J.V. Stochastic Frontier Models with Dependent Errors based on Normal and Exponential Margins // Revista de metodos cuantitativos para la economia y la empresa. 2017. Vol. 23. Pp. 3-23.
3. Благовещенский Ю.Н. Основные элементы теории копул // Прикладная эконометрика. 2012. № 2 (26). С. 113–130.
4. Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. Метод кластеризации регионов РФ с учетом отраслевой структуры ВРП // Прикладная эконометрика. 2016. № 1 (41). С. 24–46.
5. RachidaEl M., Hafner C.M. Inference in stochastic frontier analysis with dependent error terms // Mathematics and Computers in Simulation. 2014. Vol. 102. Pp. 104–116.
6. Smith M.D. Stochastic frontier models with dependent error components // The Econometrics Journal. 2008. № 11 (1). Pp. 172–192.
7. Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Руденко В.А. Исследование зависимости случайных составляющих остатков в модели стохастической границы // Прикладная эконометрика. 2014. № 2 (34). С. 3–18.